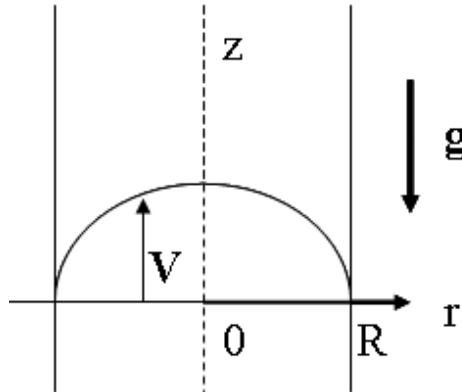


Corrigés
Chap. 9 Fluides newtoniens

Exercice 9.7 : Ecoulement de Poiseuille dans une conduite verticale

La situation est décrite dans le schéma suivant. Elle illustre la “compétition” entre la gravité qui tend à faire descendre le fluide et un gradient de pression selon l’axe z qui peut faire monter le fluide.



Ecoulement stationnaire de Poiseuille dans une conduite verticale de section circulaire de rayon R. Ecrire le bilan de conservation de la masse et en déduire que $v_r = 0$. On rappelle l’opérateur divergence en coordonnées cylindriques : $\text{div}(\mathbf{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$.

On a $\mathbf{v} = (v_r(r), 0, v_z(r))$ dans un référentiel où l’axe z est parallèle à l’axe du tube et r est le rayon. Il n’y a aucune dépendance avec l’angle θ à cause de la symétrie cylindrique. L’incompressibilité du fluide s’écrit en coordonnées cylindriques :

$$\text{div} \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} = 0 \quad \text{donc} \quad r v_r = A \quad \text{ou encore} \quad v_r = \frac{A}{r}. \quad \text{Or } v_r(R) = 0 \quad \text{donc } A = 0 \quad \text{et } v_r = 0.$$

L’équation de Navier-Stokes $\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho(\mathbf{V} \cdot \text{grad})\mathbf{V} - \mu \Delta \mathbf{V} = -\text{grad} p + \rho \mathbf{g}$ devient dans notre cas permanent : $\rho(\mathbf{V} \cdot \text{grad})\mathbf{V} - \mu \Delta \mathbf{V} = -\text{grad} p + \rho \mathbf{g}$ (relation vectorielle).

Montrer que nous avons $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \vec{0}$ et $\Delta \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{e}_z$. Selon r et θ , les composantes de la vitesse sont nulles. Selon z, nous avons :

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) V_z = v_z \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right]$$

La composante selon z de l’équation de Navier-Stokes donne :

$$-\mu \Delta v_z = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \quad \text{soit} \quad \mu \Delta v_z = \frac{\Delta p}{L} + \rho g \quad \text{ce qui devient}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} + \rho g \right) \quad \text{que l’on intègre 2 fois :}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right] = \frac{r}{\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} + \rho g \right), \quad r \frac{\partial V_z}{\partial r} = \frac{r^2}{2\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} + \rho g \right) + A, \quad \frac{\partial V_z}{\partial r} = \frac{r}{2\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} + \rho g \right) + \frac{A}{r},$$

$$V_z = \frac{r^2}{4\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} + \rho g \right) + A \ln(r) + B$$

La constante A doit être nulle pour que la vitesse en $r = 0$ soit définie. B est ensuite donnée par le fait que la vitesse est nulle en $r = R$: $V_z(r=R) = \frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} + \rho g \right) + B = 0$. In fine, on obtient l'équation de Hagen-Poiseuille (profil parabolique) :

$$V_z(r) = V_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] = - \left(\frac{\Delta p}{L} + \rho g \right) \frac{R^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

si $\frac{\Delta p}{L} + \rho g > 0$, alors $\Delta p = p(z=L) - p(z=0) > -\rho g L$ i.e. $p(z=0) < p(z=L) + \rho g L$,

le fluide descend, i.e. le gradient de pression n'arrive pas à contrecarrer la gravité.

si $\frac{\Delta p}{L} + \rho g = 0$, alors le fluide est au repos : on a une colonne hydrostatique.

si $\frac{\Delta p}{L} + \rho g < 0$, alors $\Delta p = p(z=L) - p(z=0) < -\rho g L$ i.e. $p(z=0) > p(z=L) + \rho g L$, le fluide monte

Débit volumique à travers la conduite.

$$D = \int_{\text{section}} V_z(r) dS = \int_0^R 2\pi r V_z(r) dr = 2\pi V_{\max} \int_0^R \left[r - \frac{r^3}{R^2} \right] dr$$

$$D = 2\pi V_{\max} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4} \right) = 2\pi V_{\max} \frac{R^2}{4} = \pi \left(\frac{\Delta p}{L} + \rho g \right) \frac{R^4}{8\mu} \text{ en m}^3/\text{s}$$

Exercice 9.8 convection thermique

Un fluide newtonien de viscosité μ est contenu entre deux plaques parallèles verticales, supposées semi-infinies, espacées d'une distance $2L$. La face de droite est chaude à une température T_2 , la face de gauche est froide à une température T_1 . Le fluide aura donc tendance à monter le long de la paroi droite et à descendre le long de celle de gauche. On supposera le gradient thermique G linéaire et non affecté par les courants de convection qui vont se développer. La température de la couche-milieu a donc une température $T_0 = 0.5(T_1 + T_2)$. Le fluide a une masse spécifique donnée par la relation $\rho(T) = \rho_0(1 - \beta_T(T - T_0))$. On partira de l'équation de Navier-Stokes avec l'approximation de Boussinesq

$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho_0 (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} - \mu \Delta \mathbf{v} = - \mathbf{grad} p + \rho(T) \mathbf{g}$ (la densité est constante sauf dans la force gravifique). On supposera par ailleurs que la pression dans le fluide est égale à la pression hydrostatique $\mathbf{grad} p = \rho_0 \mathbf{g}$, que le problème est stationnaire, que la vitesse a pour seule composante non-nulle $v_z(x)$ et qu'il y a non-glissement le long des faces.

Exprimez $T(x)$ en fonction de G et de T_0 .

$$T(x) = T_0 + \frac{T_2 - T_1}{2L} x = T_0 + Gx$$

Calculez le champ de vitesse.

L'équation de Navier-Stokes avec l'approximation de Boussinesq dans notre cas ou $v_z(x)$ devient :

$$\rho_0 v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = -\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g + \rho_0 g = g(\rho_0 - \rho) \text{ car } P = P_{\text{atm}} - \rho_0 g$$

$$\text{soit } -\mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = g(\rho_0 - \rho) = g\rho_0\beta(T(x)-T_0)$$

$$\text{or } T(x)-T_0 = Gx \text{ soit } \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = -g\rho_0\beta Gx$$

$$v_z(x) = -g\rho_0\beta G \frac{x^3}{6} + Ax + B \text{ car le profil est impaire en } x$$

Conditions aux limites: $v_z = 0$ en $x = L$ et $x = -L$

$$\text{Il vient: } B = 0 \text{ et } v_z(x) = -\frac{g\rho_0\beta G}{6\mu} x(x^2 - L^2) = \frac{g\rho_0\beta G}{6\mu} x(L^2 - x^2)$$

on remarque que $v_z = 0$ en $x = 0$

Représentez graphiquement le profil de vitesse en adimensionnant les grandeurs. Pour ce

faire, on introduira la vitesse $V = \frac{\beta_T \rho_0 g L^3}{6\mu} [m/s]$.

$$\text{Avec } V = \frac{\beta_T \rho_0 g L^3}{6\mu} [m/s], \text{ nous avons } v_z(x) = V \left(\frac{x}{L} \right) \left(1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right)$$

Le profil de vitesse est une courbe en x^3 impaire.

Le fluid va vers le haut du coté chaud et vers le bas du coté froid.

Où se situe la vitesse de module maximum et quelle est sa valeur ?

$$\text{Le maximum de } v_z(x) = -V \left(\frac{x}{L} \right) \left(\left(\frac{x}{L} \right)^2 - 1 \right) \text{ se trouve en } x = \pm \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$\text{et vaut } v_{\max} = V \left(\frac{L}{\sqrt{3}} \right) \left(\left(\frac{L}{\sqrt{3}} \right)^2 - 1 \right) = \frac{6}{9\sqrt{3}} V = \frac{2\sqrt{3}}{9} V$$

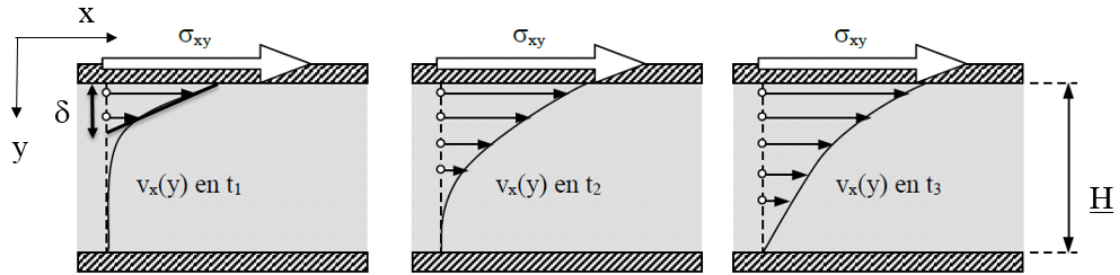
Si on double la distance entre les plaques verticales tout en conservant les températures T_1 et T_2 , comment varie la vitesse maximum ?

On double L en conservant les températures.

G se trouve divisé par 2 et les vitesses sont donc multipliées par 4.

Exercice 9.9 cisaillement transitoire

On étudie la mise en mouvement du fluide newtonien de viscosité μ initialement au repos. Par l'application d'un effort σ_{xy} sur la face supérieure (cf. fig. 9.2), on impose une vitesse V_0 en $y = 0$ au temps $t = 0$. L'épaisseur de la lame de fluide est notée H . La vitesse $v(y,t)$ est nulle sur la face inférieure.



Ecrire l'équation de Stokes que doit vérifier la vitesse $v(y,t)$.

La vitesse doit vérifier l'équation de Navier-Stokes : le terme de transport est nul.

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Chercher la solution stationnaire.

sol. stationnaire: $v(y,t) = v_0(1-y/H)$

Vérifier que $v(y,t) = v_0(1-y/H) - \frac{2V_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi y/H)}{k} e^{-\frac{k^2\pi^2\nu t}{H^2}}$ avec $\nu = \mu/\rho$ est solution du problème et qu'elle satisfait aux conditions aux limites en $y = 0$ et H .

$$v(y,t) = v_0(1-y/H) - \frac{2V_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi y/H)}{k} e^{-\frac{k^2\pi^2\nu t}{H^2}} \quad \text{avec } \nu = \mu/\rho$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{2\pi\nu V_0}{H^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \sin(k\pi y/H) e^{-\frac{k^2\pi^2\nu t}{H^2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{V_0}{H} - \frac{2V_0}{H} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi y/H) e^{-\frac{k^2\pi^2\nu t}{H^2}}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{2\pi V_0}{H^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \sin(k\pi y/H) e^{-\frac{k^2\pi^2\nu t}{H^2}} \quad \text{ainsi } \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial v}{\partial t}$$

Conditions aux limites :

$$\text{la solution } v(y,t) = v_0(1-y/H) - \frac{2V_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi y/H)}{k} e^{-\frac{k^2\pi^2\nu t}{H^2}} \quad \text{avec } \nu = \mu/\rho$$

vérifie les 2 C.L. (conditions aux limites) $v(y=0,t) = V_0$ et $v(y=H,t) = 0$

NB: quand t tend vers l'infini, on retrouve le profil stationnaire : $v(y) = v_0(1-y/H)$

Couche limite : dans le cas présent, la longueur de diffusion du mouvement est donnée par :

$$\delta = \sqrt{\nu t} \quad \text{avec } \nu = \mu/\rho$$